数学コラム(20)

ハンブルの予想

西山豊

イギリスの知人, S.ハンブルは数学教育に熱心だ. 彼が小学生向けに考えた数学パズルが，実は現代数学の奥深いところに関係していて，それがニューヨーク・タイムズ紙に Triangle Mysteries というタイトルで紹介された（2013 年 5 月 13 日).

私は，彼が考案した数学パズルに，とりこになってしまった．それはつぎのようなものである．赤，青，黄の三色のカードを使う．横一列に 4 枚のカードを色がランダムになるように並べる．たとえば，

赤，黄，青，青

とする．その下にカードを並べていくが，次の 2 つの規則がある．(1) となりあう 2 つの色が同じ色なら，それと同じ色とする．(2) 違っていたら，どちらの色とも違う第三の色とする．

この規則に従って，カードを並べてみよう．赤と黄は色が違うから，この下に来るのは青であり，黄と青は色が違うから赤になり，青と青は色が同じであるので青となる．このようにして下へ下へと並べていくと，つぎのようになる．

赤　黄　青　青
青　赤　青
黄　黄
黄

そこで最下行の色が何色になるかを，先頭行だけで予想できるかという問題である．S.ハンブルは子供たちに遊ばせながら，あることに気づく．最下行のカードの色は先頭行の両端の色で予測出来るかもしれないと言うのだ．今の例では，先頭行の左右両端は赤と青であり，規則を適用すると，色が違うから最下行は黄となり，実際に黄色となっている．

赤　黄　青　青
青　赤　青
黄　黄
黄

彼からこの話を聞いたとき, 私は半信半疑だった. そこで先頭行の色の並べ方 $3^4 = 81$ 通りについて調べてみると，彼の予想がすべてにおいて成り立っていることがわかった．それで，これを「ハンブルの予想」と呼ぶことにした.

私はパズルが好きなので，最初に並べるカードの枚数が 4 枚以外で成り立つか試してみた．先頭行を 5 枚，6 枚としたが予想は成り立たなかった．ハンブルは 10 枚の時に成り立つことを教育実践の中で知っていた．カードが 10 枚の場合は，色の塗り方が $3^{10} = 59049$ 通りもあるので，検査はプログラムの力を借りねばならない．読者は n=10 の場合を是非とも試してみてください.

2 つの色から新しい色が決まるということは，ある種の二項演算である．そして，赤，青，黄の 3 つのカードは要素が 3 の集合であり，3 つの要素は二項演算により閉じているから群を構成している．色の順序が関係しないから可換群でもある．最下行の色は，二項演算を何度も繰り返しながら得られるから，パスカルの三角形とも関係している.

高校数学で学ぶパスカルの三角形は左下図のようになるが，これらの値を 3 で割って余りを表示すると右下図のようになる.

1	1
1　1	1　1
1　2　1	1　2　1
1　3　3　1	1　0　0　1
1　4　6　4　1	1　1　0　1　1

左右両端が 1 で真ん中がすべて 0 となる行は，上から 4 行目，10 行目，28 行目…のときである．すなわち，先頭行 n が

$$n = 3^s + 1, (s = 0, 1, \cdots)$$

のときにハンブルの予測が成り立つ．小学生向けの算数教材として開発されたものだが，背景には高等数学が潜んでいる．このパズルに興味を持たれた読者は，上記の公式がどうして導かれるか考えてください.

（にしやまゆたか／大阪経済大学）

「数学コラム」『現代数学』2013 年 11 月号, Vol.46, No.11, 70